

Можливість застосування тригранника і формул Френе в складному русі точки по площині із заданим переміщенням площини

Т. М. Воліна, С. Ф. Пилипака, В. М. Несвідомін, О. Г. Павлов,
С. В. Драновська

Частинки матеріалу взаємодіють з робочими рухомими поверхнями машин при різних технологічних процесах. В механіці розглядається спосіб описання руху точки і розкладання швидкості і прискорення на одиничні орти супровідного тригранника траєкторії для простого руху. Формою просторової кривої однозначно задається рух супровідного тригранника Френе, як твердого тіла. У статті розглянуто відносний рух матеріальної частинки у стичній площині супровідного тригранника Френе, який рухається по плоскій кривій зі змінною кривиною. Для складання системи диференціальних рівнянь відносного руху частинки було використано формули Френе. На відміну від традиційного підходу, за незалежну змінну було взято не час, а довжину дуги напрямної кривої, вздовж якої рухається тригранник. Систему рівнянь складено в проєкціях на орти рухомого тригранника та розв'язано чисельними методами. Застосування супровідного тригранника кривої у ролі рухомої системи координат дає можливість розв'язувати задачі складного руху точки. Форма напрямної кривої, заданої параметричними рівняннями у функції її довжини, визначає переносний рух тригранника і дає можливість застосувати формули Френе для опису відносного руху точки в системі тригранника. Такий підхід дає можливість задавати переносний рух стичної площини тригранника по кривій зі змінною кривиною, розкриваючи додаткові можливості у розв'язанні задач на складний рух точки, при якому обертальний рух навколо нерухомої осі є частковим випадком. Запропонований підхід розглянуто на прикладі відносного руху вантажу в кузові автомобіля, який рухається по дорозі з криволінійною віссю змінної кривини. Побудовано графіки відносної траєкторії ковзання вантажу та відносної швидкості для заданої швидкості руху автомобіля.

Ключові слова: супровідний тригранник, напрямна крива, траєкторія ковзання, швидкість руху, коефіцієнт тертя.

1. Вступ

Взаємодія частинок технологічного матеріалу із робочими рухомими поверхнями машин відбувається при різних технологічних процесах. В процесі такої взаємодії частинки змушені певним чином ковзати по поверхні у відносному русі і описувати іншу траєкторію у абсолютному русі. Абсолютна траєкторія є геометричною сумою відносного руху ковзання частинки і переносного руху поверхні. Для додавання цих рухів зручно користуватися двома системами координат: рухомою, по відношенню до якої описується відносний рух частинки, і нерухомою, по відношенню до якої описується переносний рух поверхні і аб-

солотний рух частинки. В механіці є відомим спосіб описання руху точки і розкладання швидкості і прискорення на одиничні орти супровідного тригранника траєкторії, однак це стосується простого руху.

Питання використання формул і тригранника Френе у складному русі точки по площині дає змогу по новому розв'язувати ці задачі.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Дослідження руху різних середовищ інколи зводиться до дослідження окремої частинки. Рух окремої частинки або матеріальної точки не можна ототожнювати з рухом тіла або технологічного матеріалу, який складається з окремих частинок. Проте на основі руху окремої частинки можна виявити закономірності, які певною мірою можна перенести на тіло або на матеріал або ж виявити напрям, в якому потрібно продовжувати подальші дослідження. Так, у статті [1] авторами розглянуто розкидання мінеральних добрив відцентровим робочим пристроєм на прикладі окремої частинки, що дозволило визначити вплив швидкості повітряного потоку на кінцевий розподіл гранул при різних режимах. У роботі [2] проведено симуляцію такого процесу. Рух частинки зернової суміші під час аспіраційного розділення досліджено у праці [3] зі складанням диференціальних рівнянь руху частинки. Вплив коливального руху на ефективність сепарування сумішей розкрито у [4], проте авторами розглянуто лише коливальний рух, викликаний осьовими переміщеннями. Теорія розсіювання частинок мінеральних добрив висвітлена в монографії [5]. Дослідження руху тіла в окремих випадках теж можна звести до частинки. Це стосується того випадку, коли силами інерції від обертання тіла можна знехтувати через малі кутові швидкості їх обертання [6]. У перерахованих працях [1–6] досить широко висвітлені питання складного руху частинки. Для них спільним є те, що в ролі незалежної змінної виступає час.

Близьким за постановкою задачі є рух частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка обертається навколо вертикальної осі [7]. Її розв'язання відоме і зводиться до системи диференціальних рівнянь, яку потрібно розв'язувати чисельними методами. Але залишилися невисвітленими питання складного руху точки по площині, точка якої при переносному русі описує не коло, а плоску криву змінної кривини. У такому випадку можуть виникнути труднощі громіздкого аналітичного опису відносного руху частинки. Варіантом подолання цих труднощів може бути використання тригранника і формул Френе, яке було застосовано при дослідженні руху частинки по внутрішній поверхні сферичного сегмента, що обертається навколо вертикальної осі, розглянутому у праці [8], а також по зовнішній поверхні горизонтального циліндра із коливальним рухом [9].

3. Мета та задачі дослідження

Метою роботи є показати можливість застосування тригранника і формул Френе для аналітичного опису складного руху матеріальної точки по його площині, переносне переміщення якої задане плоскою напрямною кривою, вздовж якої рухається тригранник.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- скласти систему диференціальних рівнянь відносного руху частинки з використанням формул Френе;
- розглянути запропонований підхід на прикладі відносного руху вантажу в кузові автомобіля, який рухається по дорозі з криволінійною віссю змінної кривини;
- розв’язати складену систему диференціальних рівнянь чисельними методами;
- побудувати графіки відносної траєкторії ковзання вантажу в кузові автомобіля, який рухається по дорозі з криволінійною віссю змінної кривини.

4. Матеріали та методи дослідження можливості застосування тригранника Френе у складному русі точки

Оскільки формою просторової кривої однозначно задається рух супровідного тригранника Френе, то таким чином однозначно задається рух кожної з його граней. Якщо напрямна крива є просторовою, то закономірність руху тригранника залежить від двох диференціальних характеристик кривої: її кривини і скруту. Розглянуто спрощений варіант для плоскої кривої, у якій скрут дорівнює нулю. На рис. 1 у площині μ розташована крива C_e , вздовж якої рухається супровідний тригранник $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} . У цьому випадку стична площина тригранника, утворена ортами дотичної $\bar{\tau}$ і головної нормалі \bar{n} , буде збігатися з площиною самої напрямної кривої (на рис. 1, 2 стична площина тригранника є затемненою).

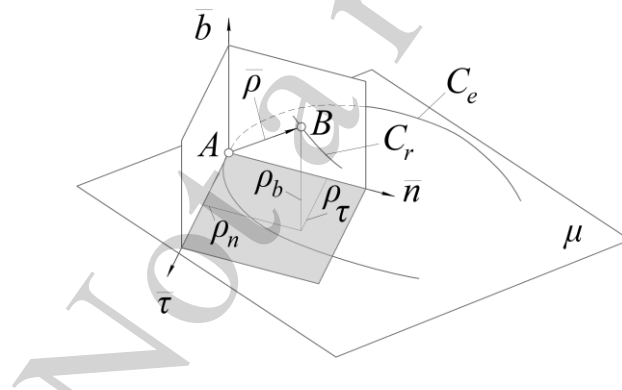


Рис. 1. Графічна ілюстрація до складання векторного рівняння руху точки B , як геометричної суми переносного руху тригранника і відносного руху точки в триграннику: супровідний тригранник $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} напрямної плоскої кривої C_e із позначеними координатами точки B в його системі

При русі тригранника вздовж напрямної кривої C_e зі швидкістю V_e стична площина ще й повертатиметься. Кут її повороту α визначається кутом повороту дотичної $\bar{\tau}$. При переміщенні тригранника по кривій на довжину її дуги Δs дотична повернеться на кут $\Delta\alpha$. Відомо, що границя відношення $\Delta\alpha/\Delta s$ при прямуванні Δs до нуля, є величиною кривини k кривої. З іншої сторони, границя $\Delta\alpha/\Delta t$, де Δt – час, за який відбувся поворот, дає величину кутової швидкості ω повороту стичної площини. Очевидно, що між кривиною k кривої і кутовою швидкістю ω повороту стичної площини існує взаємозв’язок. Його можна знайти:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = kV_e. \quad (1)$$

Із залежності (1) випливає, що при сталих значеннях швидкості руху тригранника і кривини напрямної кривої (тобто кола), кутова швидкість обертання стичної площини теж є сталою величиною.

Абсолютний рух частинки складатиметься з двох рухів – переносного руху тригранника Френе і відносного руху частинки в системі тригранника. Нехай частинка буде розташована на певній відстані ρ від вершини тригранника. Тоді її положення у векторному вигляді запишеться (рис. 2):

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\rho}, \quad (2)$$

де \bar{R} – радіус-вектор положення частинки в нерухомій системі $OXYZ$, \bar{r} – радіус-вектор точки на кривій, в якій знаходиться вершина A тригранника, $\bar{\rho}$ – радіус-вектор положення частинки в системі тригранника.

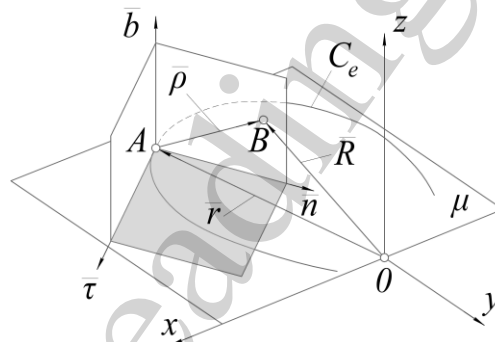


Рис. 2. Схема до складання векторного рівняння положення точки B із урахуванням двох систем: $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} і $OXYZ$

Вважатимемо, що координати ρ_τ , ρ_n і ρ_b в системі тригранника є змінними і залежними від положення його на кривій C_e , тобто залежними від довжини дуги s напрямної кривої. У такому випадку при русі тригранника по кривій точка B певним чином рухатиметься в його системі, описуючи відносну траєкторію C_r (рис. 1). Перепишемо вираз (2) із урахуванням розкладання вектора $\bar{\rho}$ на орти тригранника:

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\tau}\rho_\tau + \bar{n}\rho_n + \bar{b}\rho_b. \quad (3)$$

Щоб знайти абсолютну швидкість руху частинки V_a , потрібно векторне рівняння (3) продиференціювати по часу t . Застосування тригранника Френе дає можливість використати формули Френе, які широко відомі у диференціальній

геометрії. Це дозволяє просто знаходити похідні ортів тригранника в проекціях на ці ж орти. Однак у цьому випадку незалежною змінною має бути довжина дуги s – шляху, який проходить вершина тригранника, рухаючись по кривій C_e . Приймаючи s за незалежну змінну, знайдемо взаємозв'язок між абсолютною швидкістю V_a і похідною вектора \bar{R} по змінній s :

$$V_a = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}}{ds} \frac{ds}{dt} = V_e \frac{d\bar{R}}{ds}. \quad (4)$$

Таким чином, щоб отримати вираз абсолютної швидкості V_a , потрібно швидкість V_e переносного руху тригранника по кривій C_e помножити на похідну виразу (3). Продиференціюємо (3) по змінній s , маючи на увазі, що $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$, $\rho_n = \rho_n(s)$ і $\rho_b = \rho_b(s)$:

$$\frac{d\bar{R}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds} + \left(\frac{d\bar{\tau}}{ds} \rho_\tau + \bar{\tau} \frac{d\rho_\tau}{ds} \right) + \left(\frac{d\bar{n}}{ds} \rho_n + \bar{n} \frac{d\rho_n}{ds} \right) + \left(\frac{d\bar{b}}{ds} \rho_b + \bar{b} \frac{d\rho_b}{ds} \right). \quad (5)$$

Похідні $\frac{d\bar{r}}{ds}$, $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$, $\frac{d\bar{n}}{ds}$, $\frac{d\bar{b}}{ds}$ згідно формул Френе розписуються в проекціях на орти тригранника через кривину k і скрут σ напрямної кривої. Напрямна крива C_e є плоскою кривою, отже скрут $\sigma=0$. Формули Френе в цьому випадку спрощуються і мають наступний вигляд [10]:

$$\bar{r} = \bar{\tau}; \quad \bar{\tau} = k\bar{n}; \quad \bar{n} = -k\bar{\tau}; \quad \bar{b} = 0. \quad (6)$$

Реалізація процедури (1)–(6) дала змогу перейти до складання системи диференціальних рівнянь відносного руху частинки по площині з використанням формул Френе.

5. Результати дослідження можливості застосування тригранника Френе у складному русі точки

5.1. Складання системи диференціальних рівнянь відносного руху частинки по площині з використанням формул Френе

Враховуючи, виконання умови $\rho_b = \dot{\rho}_b = 0$, яка пов'язана з рухом точки в горизонтальній (тобто стичній) площині тригранника, та підставивши вирази похідних (6) у (5), після групування проекцій по ортах $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} отримано:

$$\bar{R} = \bar{\tau} + \bar{n}k\rho_\tau + \bar{\tau}\dot{\rho}_\tau - \bar{\tau}k\rho_n + \bar{n}\dot{\rho}_n = \bar{\tau}(1 + \dot{\rho}_\tau - k\rho_n) + \bar{n}(\dot{\rho}_n + k\rho_\tau). \quad (7)$$

Диференціюванням абсолютної швидкості (4) по часу t при умові, що $V_e = \text{const}$, отримано вираз абсолютного прискорення w :

$$w = \frac{d}{dt} \left(V_e \frac{d\bar{R}}{ds} \right) = V_e^2 \frac{d^2 \bar{R}}{ds^2}. \quad (8)$$

Другу похідну $\bar{\bar{R}}$ знайдено диференціюванням векторного виразу (7) по змінній s із застосуванням формул Френе (6), з урахуванням того, що кривина $k=k(s)$ є змінною величиною і отримані вирази згруповано по ортах тригранника:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{R}} &= \bar{\tau}(1 + \dot{\rho}_\tau - k\rho_n) + \bar{\tau}(\ddot{\rho}_\tau - \dot{k}\rho_n - k\dot{\rho}_n) + \\ &+ \bar{n}(\dot{\rho}_n + k\rho_\tau) + \bar{n}(\ddot{\rho}_n + \dot{k}\rho_\tau + k\dot{\rho}_\tau) = \\ &= \bar{\tau}[\ddot{\rho}_\tau - \dot{k}\rho_n - k(k\rho_\tau + 2\dot{\rho}_n)] + \\ &+ \bar{n}[\ddot{\rho}_n - \dot{k}\rho_\tau + k(1 - k\rho_n + 2\dot{\rho}_\tau)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Після множення отриманих результатів (9) на V_e^2 згідно (8), можна отримати вирази абсолютного прискорення точки B у проєкціях на орти тригранника:

$$\begin{aligned} w_\tau &= V_e^2 [\ddot{\rho}_\tau - \dot{k}\rho_n - k(k\rho_\tau + 2\dot{\rho}_n)]; \\ w_n &= V_e^2 [\ddot{\rho}_n - \dot{k}\rho_\tau + k(1 - k\rho_n + 2\dot{\rho}_\tau)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Точка рухається в стичній площині тригранника, а сам тригранник рухається по кривій. Для знаходження величини абсолютного прискорення точки необхідно задати швидкість руху тригранника V_e , параметричні рівняння прямої кривої $x=x(s)$ та $y=y(s)$ і закон руху точки $\rho_\tau=\rho_\tau(s)$, $\rho_n=\rho_n(s)$. Кривину $k=k(s)$ прямої кривої C_e знаходять за відомою формулою: $k = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$.

Складнішою є обернена задача – знаходження закону відносного руху матеріальної точки (частинки), яка рухається під дією прикладених до неї сил.

5. 2. Застосування запропонованого підходу до розв’язання задачі відносного руху вантажу в кузові автомобіля

Умовами дослідження передбачено, що стична площина представляє собою кузов вантажного автомобіля, який рухається зі сталою швидкістю V_e по горизонтальній дорозі з криволінійною віссю у вигляді прямої кривої. Роль матеріальної точки відіграватиме вантаж у кузові автомобіля. Потрібно знайти траєкторію та величину швидкості можливого ковзання вантажу в кузові.

Вісь дороги, тобто криву C_e , задамо параметричними рівняннями:

$$x = 2a \cdot \arctg\left(\frac{s}{a}\right) - s;$$

$$y = a \cdot \ln \left(\frac{a^2 + s^2}{a^2} \right). \quad (11)$$

Кривину k кривої, заданої параметричними рівняннями у функції довжини дуги s , знаходять за відомою формулою:

$$k = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}. \quad (12)$$

Після підстановки у (12) других похідних рівнянь (11), було знайдено вираз кривини k і після диференціювання \dot{k} :

$$k = \frac{2a}{a^2 + s^2};$$

$$\dot{k} = -\frac{4as}{(a^2 + s^2)^2}. \quad (13)$$

Диференціальне рівняння абсолютного руху частинки у векторному записі має вигляд: $m\bar{w} = \bar{F}$, де m – маса частинки, \bar{w} – вектор абсолютного прискорення, \bar{F} – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги mg ($g=9.81$ м/с²), реакція N площини (днища) кузова, сила тертя $F=f \cdot N$ при ковзанні частинки по днищі кузова, де f – коефіцієнт тертя. Усі сили мають строго визначений напрям дії.

Сила ваги mg спрямована вниз, тобто в протилежну сторону напрямку орта біноormalі \bar{b} та врівноважується реакцією N днища автомобіля, спрямованою вгору. Таким чином, можна записати: $N=mg$. Отже, сила тертя має сталу величину: $F=f \cdot m \cdot g$ та спрямована у протилежну сторону швидкості V_r ковзання частинки, яка знаходиться в точці B . На рис. 3 крива C_e зображена на вигляді зверху, коли біноormalь \bar{b} проєкціюється в точку. Прямокутне днище автомобіля зафарбоване в сірий колір і утворене при від'ємних значеннях ортів $\bar{\tau}$ і \bar{n} тригранника. Таке його розташування відповідає ймовірній траєкторії ковзання вантажу, оскільки відцентрова сила, що зумовлює його ковзання, спрямована від центру кривини прямої кривої. Необхідно знайти одиничний напрямний вектор дії сили тертя F . Проєкції відносної швидкості частинки на орти тригранника відшукуються множенням похідних радіус-вектора $\bar{\rho}$ на швидкість V_e в силу зазначених раніше причин. Отже, проєкції відносної швидкості V_r ковзання і її величина запишуться:

$$V_{r\tau} = V_e \dot{\rho}_\tau; \quad V_{rn} = V_e \dot{\rho}_n; \quad V_r = V_e \sqrt{\dot{\rho}_\tau^2 + \dot{\rho}_n^2}. \quad (14)$$

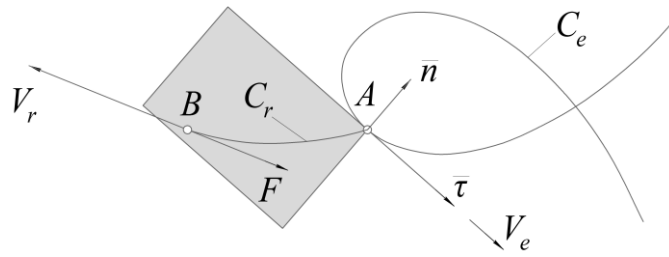


Рис. 3. Схема переміщення кузова автомобіля вздовж криволінійної ділянки шляху з векторами переносної V_e , відносної V_r швидкостей і сили тертя F

Силу тертя $F=fmg$ може бути розкладено на орти тригранника з урахуванням її напрямку та у відповідності зі співвідношенням проекцій (14):

$$F_\tau = -fmg \frac{\dot{\rho}_\tau}{\sqrt{\dot{\rho}_\tau^2 + \dot{\rho}_n^2}}; \quad F_n = -fmg \frac{\dot{\rho}_n}{\sqrt{\dot{\rho}_\tau^2 + \dot{\rho}_n^2}}. \quad (15)$$

Векторне рівняння $m\bar{w} = \bar{F}$ у проекціях на орти тригранника запишеться:

$$mw_\tau = F_\tau; \quad mw_n = F_n. \quad (16)$$

Після підстановки у рівняння (16) виразів абсолютного прискорення (10), сили тертя F (15) і після скорочення на масу m отримано систему двох диференціальних рівнянь з двома невідомими функціями $\rho_\tau=\rho_\tau(s)$ і $\rho_n=\rho_n(s)$:

$$V_e^2 (\ddot{\rho}_\tau - k\rho_n - k^2\rho_\tau - 2k\dot{\rho}_n) = -fg \cdot \frac{\dot{\rho}_\tau}{\sqrt{\dot{\rho}_\tau^2 + \dot{\rho}_n^2}};$$

$$V_e^2 (\ddot{\rho}_n + k + k\rho_\tau - k^2\rho_n + 2k\dot{\rho}_\tau) = -fg \cdot \frac{\dot{\rho}_n}{\sqrt{\dot{\rho}_\tau^2 + \dot{\rho}_n^2}}. \quad (17)$$

Приведені результати дозволяють перейти до чисельного інтегрування складеної системи диференціальних рівнянь та до графічного представлення отриманих результатів.

5. 3. Розв'язання системи диференціальних рівнянь відносного руху частинки по площині чисельними методами

Інтегрування системи (17) здійснювалося при зміні дугової координати s від -40 м до 40 м. Значення постійних прийнято наступними: $a=15$; $f=0.3$; $V_e=5$ м/с. На рис. 4 побудовано графіки зміни відносної і абсолютної швидкості руху вантажу. Із рис. 4, а видно, що ковзання вантажу почалося приблизно при $s \approx -5.5$ м і закінчилося при $s \approx 14$ м, при цьому максимальна відносна швидкість досягла значення $V_r \approx 0.7$ м/с. Значення дугової координати s , при якому почався

відносний рух, можна визначити аналітичним шляхом. Ковзання вантажу почнеться тоді, коли відцентрова сила $F_c = mV_e^2 k$ перевищить силу тертя $F = fmg$. Прирівнявши ці сили і підставивши вираз $k = k(s)$ із (3), одержимо рівняння граничного значення дугової координати s :

$$\frac{m \cdot V_e^2 \cdot 2a}{a^2 + s^2} = fmg,$$

звідки

$$s = \sqrt{\frac{a}{fg} (2V_e^2 - afg)}. \quad (18)$$

Розв'язок рівняння (18) при зазначених постійних показує, що відносний рух вантажу почнеться при $s > -5.46$ м. Максимальна абсолютна швидкість руху вантажу досягається при $s \approx 14$ м. В цей момент ковзання вантажу припиняється і абсолютна його швидкість починає зменшуватися (рис. 4, б).

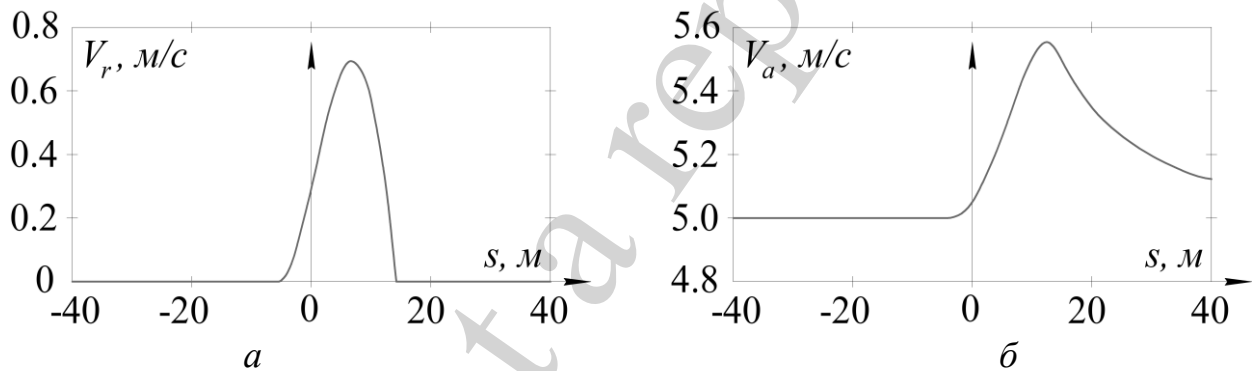


Рис. 4. Графіки зміни швидкостей руху вантажу в кузові автомобіля: а – відносний рух; б – абсолютний рух

Доцільним також є наведення графічної інтерпретації траєкторії ковзання вантажу в кузові автомобіля.

5. 4. Побудова графіків відносної траєкторії ковзання вантажу в кузові автомобіля

На рис. 5, а в масштабі побудована напрямна крива C_e , на якій потовщеною лінією виділено ділянку, при русі по якій стичної площини тригранника (тобто днища кузова автомобіля) відбувалося ковзання вантажу. Сам кузов у збільшеному масштабі показаний на рис. 5, б, на якому побудовано траєкторію C_r ковзання вантажу. З рис. 5, б видно, що вантаж у кузові змістився приблизно на 1.5 м в сторону протилежного борта і приблизно на 0.25 м в сторону, протилежну напрямку руху.

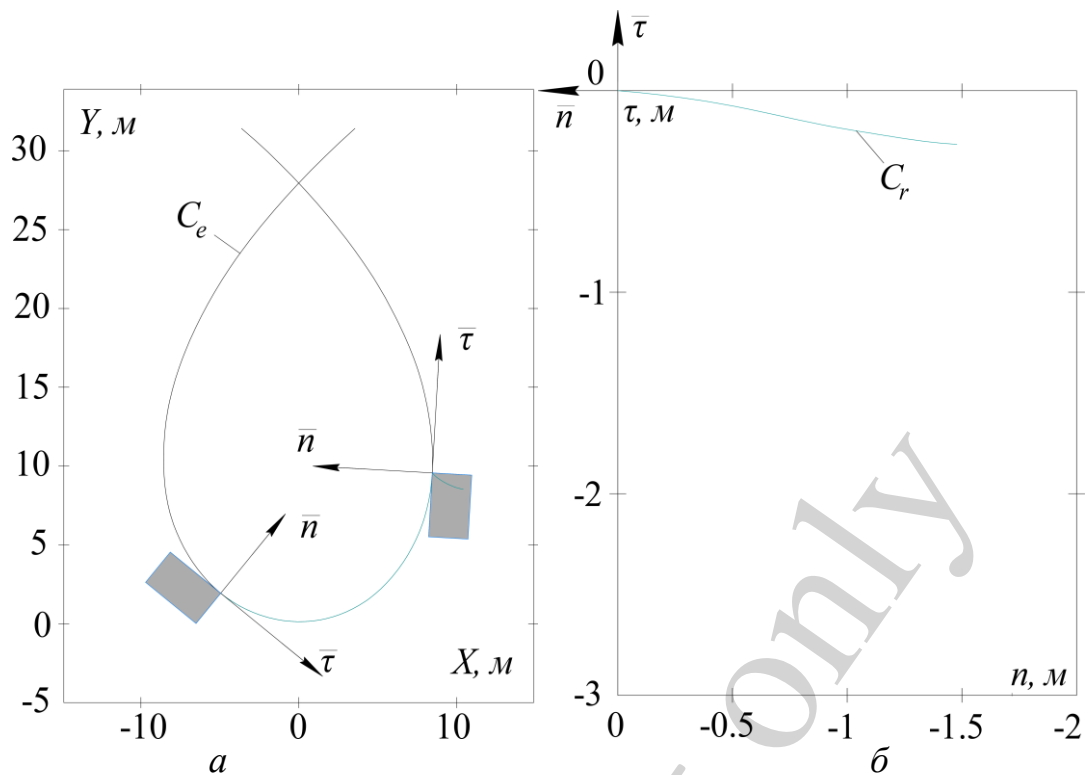


Рис. 5. Графічні ілюстрації до руху автомобіля з вантажем у кузові, що зафарбований у сірий колір: *a* – траєкторія C_e руху автомобіля з його положенням на початку ковзання вантажу і після припинення ковзання; *б* – траєкторія C_r ковзання вантажу

Траєкторія і швидкість ковзання вантажу значною мірою залежать від коефіцієнта тертя і швидкості руху автомобіля.

На рис. 6 побудовано графіки зміни швидкості ковзання і траєкторії руху вантажу в кузові автомобіля для різних значень коефіцієнта тертя f .

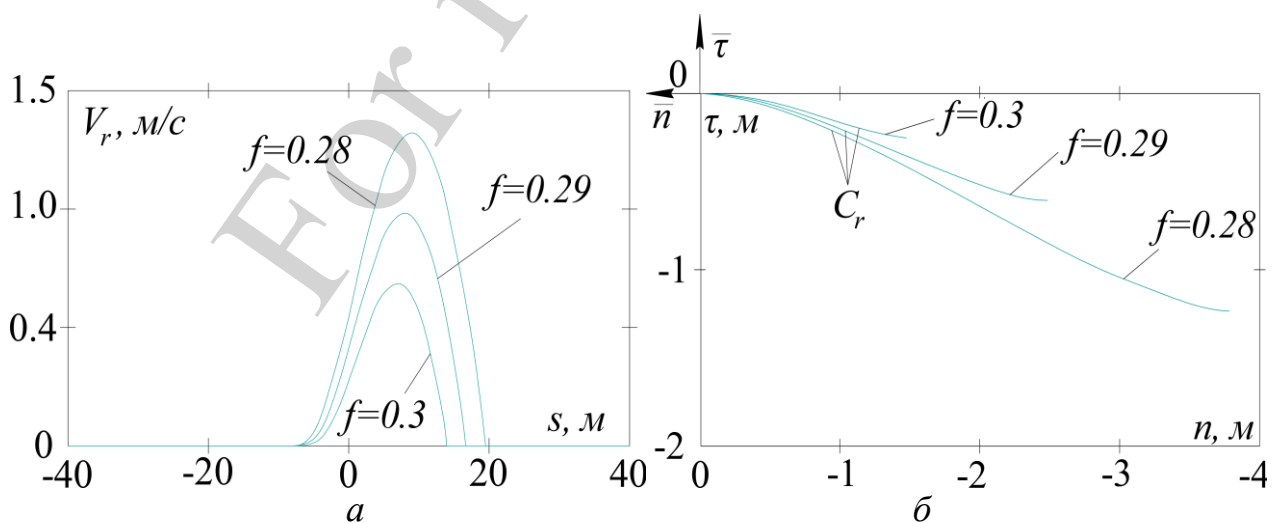


Рис. 6. Графічні ілюстрації ковзання вантажу у кузові автомобіля для різних значень коефіцієнта тертя f : *a* – графіки зміни відносної швидкості ковзання; *б* – траєкторії ковзання вантажу

Суттєвий вплив швидкості V_e руху автомобіля на траєкторію ковзання вантажу пояснюється тим, що квадрат швидкості V_e входить до виразу відцентрової сили $F_c = mV_e^2 k$, яка спричинює ковзання.

6. Обговорення результатів дослідження можливості застосування тригранника Френе у складному русі точки

Застосування супровідного тригранника кривої у ролі рухомої системи координат дозволило досягти поставленої мети і отримати результати стосовно поставлених задач. Їх розв'язання пояснюється наступними чинниками:

- складено систему диференціальних рівнянь (17) із застосуванням формул Френе;

- напрямна крива супровідного тригранника задана криволінійною віссю дороги, по якій рухається автомобіль, – ця крива задана параметричними рівняннями (11);

- система диференціальних рівнянь (17) розв'язана чисельними методами, що дозволило побудувати графіки зміни швидкості відносного (рис. 4, а) і абсолютного (рис. 4, б) руху вантажу в кузові автомобіля;

- побудовано траєкторії відносного руху (ковзання) вантажу в кузові автомобіля для різних коефіцієнтів тертя (рис. 6, б).

Завдяки застосуванню тригранника і формул Френе забезпечується подальший розвиток аналітичного опису складного руху частинки по площині. Альтернативні рішення цієї задачі стосуються обертального руху площини, а розширені – більш складного її руху, коли точка площини описує не коло, а криву змінної кривини. Доказова база такого підходу ґрунтується на застосуванні відомих математичних формул Френе диференціальної геометрії для розв'язання задач динаміки матеріальної точки теоретичної механіки. Обмеженням запропонованого підходу є умова використання в ролі незалежної змінної напрямної кривої довжини її дуги, що можливо для обмеженого класу кривих. Розвиток дослідження може бути розширений на просторові напрямні криві.

7. Висновки

1. Формою просторової кривої однозначно задається рух кожної грані супровідного тригранника Френе. Якщо напрямна крива є плоскою, то закономірність руху тригранника залежить від її кривини. Стична площина тригранника у такому випадку збігається з площиною самої напрямної кривої. Абсолютний рух частинки складається з двох рухів – переносного руху тригранника Френе та відносного руху частинки в системі тригранника. Для складання системи диференціальних рівнянь відносного руху частинки були використані формули і тригранник Френе, широко відомі у диференціальній геометрії. У ролі незалежної змінної при цьому було взято довжину шляху, який проходить вершина тригранника, рухаючись по кривій. Дослідження руху частинки проводилось у стичній (горизонтальній) площині тригранника.

2. Стична площина представляє собою кузов вантажного автомобіля, який рухається зі сталою швидкістю по горизонтальній дорозі з криволінійною віссю

у вигляді напямної кривої. Роль матеріальної точки відіграє вантаж у кузові автомобіля. Складено диференціальні рівняння абсолютного руху частинки з урахуванням прикладених до неї сил. Знайдено систему рівнянь, яка дозволяє визначити величину швидкості можливого ковзання вантажу в кузові автомобіля. Представлено графічну інтерпретацію траєкторії можливого ковзання вантажу в кузові.

3. Інтегрування складеної системи диференціальних рівнянь здійснювалося при зміні дугової координати від -40 м до 40 м. Побудовано графіки зміни відносної і абсолютної швидкості руху вантажу. Графічна інтерпретація результатів показала, що ковзання вантажу починається приблизно при -5.5 м і закінчується при 14 м. При цьому максимальна відносна швидкість досягає значення 0.7 м/с. Крім того, аналітичним шляхом знайдено рівняння граничного значення дугової координати. Розв'язок цього рівняння показав, що відносний рух вантажу починається при -5.46 м, а максимальна абсолютна швидкість вантажу досягається при 14 м. Побудовано графіки зміни швидкостей руху вантажу в кузові автомобіля.

4. Наведено графічні ілюстрації до руху автомобіля з вантажем у кузові, а саме: траєкторія руху автомобіля з його положенням на початку ковзання вантажу і після припинення ковзання та траєкторія ковзання вантажу. Аналіз графічних ілюстрацій показав, що вантаж у кузові змістився приблизно на 1.5 м в сторону протилежного борта і приблизно на 0.25 м в сторону, протилежну напрямку руху. Крім того, враховано вплив коефіцієнта тертя та швидкості руху автомобіля на траєкторію та швидкість ковзання вантажу.

Література

1. Kobets, A. S., Ponomarenko, N. O., Kharytonov, M. M. (2017). Construction of centrifugal working device for mineral fertilizers spreading. INMATEH – Agricultural Engineering, 51 (1), 5–14. URL: <https://dspace.dsau.dp.ua/jspui/bitstream/123456789/64/1/%D0%A1onstruction.pdf>
2. Abbou-ou-cherif, E.-M., Piron, E., Chateauneuf, A., Miclet, D., Lenain, R., Koko, J. (2017). On-the-field simulation of fertilizer spreading: Part 1 – Modeling. Computers and Electronics in Agriculture, 142, 235–247. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compag.2017.09.006>
3. Bulgakov, V., Nikolaenko, S., Holovach, I., Boris, A., Kiurchev, S., Ihnatiev, Ye., Olt, J. (2020). Theory of motion of grain mixture particle in the process of aspiration separation. Agronomy Research, 18 (2), 1177–1188. doi: <https://doi.org/10.15159/AR.20.069>
4. Адамчук, В. В., Прилуцкий, А. Н. (2018). Теоретические исследования влияния колебательного движения решет на эффективность сепарирования зерновых смесей. Механизация и электрификация сельского хозяйства, 28–34. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32699362>
5. Адамчук, В. В. (2010). Теория центробежных рабочих органов машин для внесения минеральных удобрений. Киев: Аграрна наука, 177. URL: http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?Z21ID=&I21DBN=EC&P21DBN=EC&S21STN=1&S21REF=10&S21FMT=fullwebr&C21COM=S&S

21CNR=20&S21P01=0&S21P02=0&S21P03=I=&S21COLORTERMS=1&S21STR=%D0%92%D0%90738863\$

6. Loveikin, V. S., Romasevych, Yu. O. (2017). Dynamic optimization of a mine winder acceleration mode. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 4, 55–61. URL: http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=Nvngu_2017_4_10

7. Kurzthaler, C., Zhu, L., Pahlavan, A. A., Stone, H. A. (2020). Particle motion nearby rough surfaces. *Physical Review Fluids*, 5 (8). doi: <https://doi.org/10.1103/physrevfluids.5.082101>

8. Pylypaka, S., Nesvidomin, V., Volina, T., Sirykh, L., Ivashyna, L. (2020). Movement of the Particle on the Internal Surface of the Spherical Segment Rotating About a Vertical Axis. *INMATEH Agricultural Engineering*, 62 (3), 79–86. doi: <https://doi.org/10.35633/inmateh-62-08>

9. Pylypaka, S., Klendiy, M., Zaharova, T. (2018). Movement of the Particle on the External Surface of the Cylinder, Which Makes the Translational Oscillations in Horizontal Planes. *Advances in Design, Simulation and Manufacturing*, 336–345. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-93587-4_35

10. Милинский, В. И. (1934). Дифференциальная геометрия. Ленинград, 332.